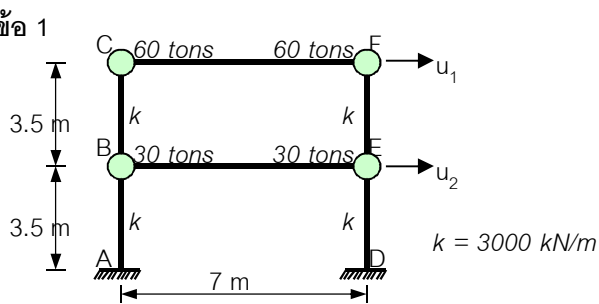


ข้อ 1



พิจารณาโครงสร้างข้างล่างนี้ และคำนวณหา

ก) ความถี่ธรรมชาติ

ข) Mode shape

ค) Sketch shape ที่ได้ใน ข.

$$k = 3000 \text{ kN/m}$$

$$k = 3000 \text{ kN/m}$$

$$k = \begin{bmatrix} 6000 & -6000 \\ -6000 & 12000 \end{bmatrix}$$

$$m = \begin{bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 60 \end{bmatrix}$$

หาค่าความถี่ธรรมชาติจาก $|k - \omega^2 \cdot m| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 6000 - 120\omega^2 & -6000 \\ -6000 & 12000 - 60\omega^2 \end{vmatrix} = 0$

$$(6000 - 120\omega^2)(12000 - 60\omega^2) - 36000000 = 0$$

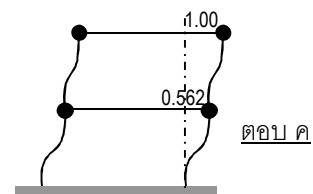
$$\omega^2 = 21.9 \text{ และ } 228.1$$

$$\omega = 4.68 \text{ และ } 15.1 \text{ Rad/s}$$

ความถี่ธรรมชาติ $f_1 = 0.745 \text{ Hz}$ } ตอบ ก
 $f_2 = 2.40 \text{ Hz}$

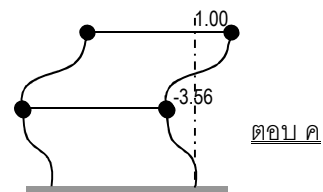
ที่ $f_1 = 0.745 \text{ Hz}$ $\begin{bmatrix} 3369 & -6000 \\ -6000 & 10685 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ได้ Mode shape $\phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.562 \end{bmatrix}$ ตอบ ข

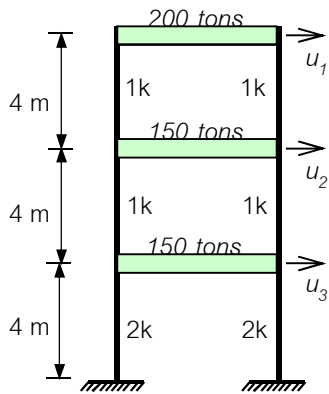


ที่ $f_2 = 2.40 \text{ Hz}$ $\begin{bmatrix} -21369 & -6000 \\ -6000 & -1685 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ได้ Mode shape $\phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3.56 \end{bmatrix}$ ตอบ ข



ข้อ 2



พิจารณาโครงสร้างข้างล่างนี้ และคำนวณหา

ก) ความถี่ธรรมชาติ

ข) Mode shape

ค) Sketch shape ที่ได้ใน ข.

k = 2000 kN/m

1. เขียน Mass และ Stiffness matrix

$$k = \begin{bmatrix} 2000000 & -2000000 & 0 \\ -2000000 & 4000000 & -2000000 \\ 0 & -2000000 & 6000000 \end{bmatrix} \quad (N/m)$$

$$m = \begin{bmatrix} 200000 & 0 & 0 \\ 0 & 150000 & 0 \\ 0 & 0 & 150000 \end{bmatrix} \quad (kg)$$

2. หาค่าความถี่ธรรมชาติจาก

$$|k - \omega^2 \cdot m| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1000(2000-200\omega^2) & -2000000 & 0 \\ -2000000 & 1000(4000-150\omega^2) & -2000000 \\ 0 & -2000000 & 1000(6000-150\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

แก้สมการได้

ความถี่ธรรมชาติ

$$\omega_1 = 1.718 \text{ Rad/s}; \quad k - \omega_1^2 m = \begin{bmatrix} 1409695 & -2000000 & 0 \\ -2000000 & 3557271 & -2000000 \\ 0 & -2000000 & 5557271 \end{bmatrix}$$

$$\text{Mode shape} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.705 \\ 0.254 \end{bmatrix}$$

ความถี่ธรรมชาติ

$$\omega_2 = 4.945 \text{ Rad/s}; \quad k - \omega_2^2 m = \begin{bmatrix} -2890946 & -2000000 & 0 \\ -2000000 & 331790.5 & -2000000 \\ 0 & -2000000 & 2331790 \end{bmatrix}$$

$$\text{Mode shape} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.445 \\ -1.240 \end{bmatrix}$$

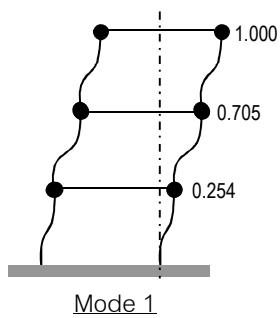
ความถี่ธรรมชาติ

$$\omega_3 = 7.019 \text{ Rad/s}; \quad k - \omega_3^2 m = \begin{bmatrix} -7852080 & -2000000 & 0 \\ -2000000 & -3389060 & -2000000 \\ 0 & -2000000 & -1389060 \end{bmatrix}$$

$$\text{Mode shape} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3.926 \\ 5.653 \end{bmatrix}$$

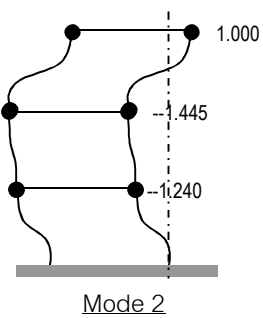
↑
ตอบ ก

↑
ตอบ ข



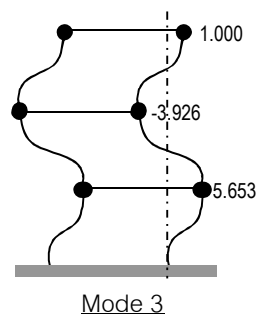
$$\omega_1 = 1.718 \text{ rad/s}$$

$$T_1 = 3.657 \text{ s}$$



$$\omega_2 = 4.945 \text{ rad/s}$$

$$T_2 = 1.271 \text{ s}$$

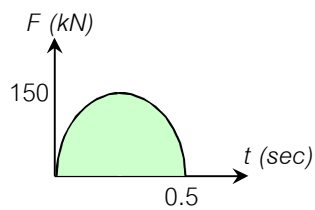


$$\omega_3 = 7.019 \text{ rad/s}$$

$$T_3 = 0.895 \text{ s}$$

ตอบ ค

ข้อ 3 ถ้าโครงสร้างในข้อ 2 ได้รับแรงกระทำแบบ Impulse ที่เป็นรูป Sine ครึ่งลูกดังในรูปด้านล่าง



$$\begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \bullet F$$

$$F = 150 \text{ kN}$$

ให้คำนวณหา

ก) Modal displacement

ข) Displacement ที่ยอดอาคาร

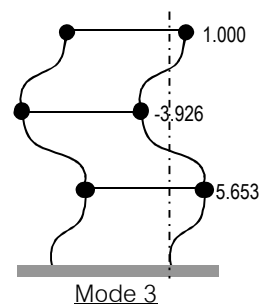
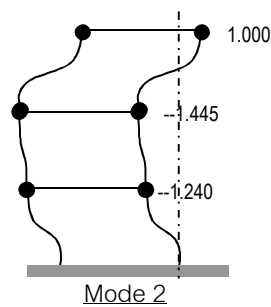
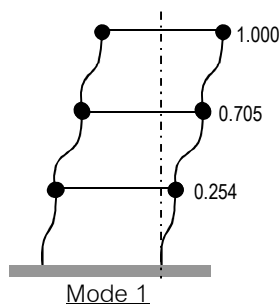
ค) แรงเฉือนในเสาที่ฐานของอาคาร

$$t_1 = 0.5 \text{ sec}$$

1. สรุป Mode shape ของโครงสร้าง

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.705 & -1.445 & -3.926 \\ 0.254 & -1.240 & 5.653 \end{bmatrix}$$

$$m = \begin{bmatrix} 200000 & 0 & 0 \\ 0 & 150000 & 0 \\ 0 & 0 & 150000 \end{bmatrix} \text{ (kg)}$$



$$\omega_1 = 1.718 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 4.945 \text{ rad/s}$$

$$\omega_3 = 7.019 \text{ rad/s}$$

$$T_1 = 3.657 \text{ s}$$

$$T_2 = 1.271 \text{ s}$$

$$T_3 = 0.895 \text{ s}$$

$$t_1/T_1 = 0.137$$

$$t_1/T_2 = 0.394$$

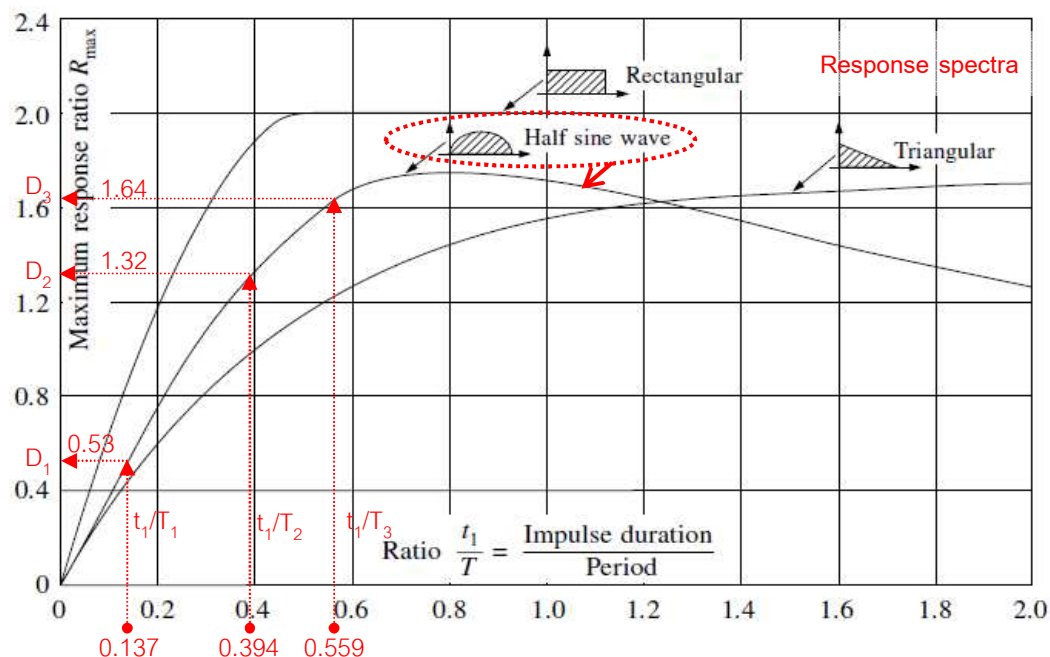
$$t_1/T_3 = 0.559$$

2. หาค่า Dynamic magnification factor (D) จาก Response spectra ได้ค่า

$$D_1 = 0.53$$

$$D_2 = 1.32$$

$$D_3 = 1.64$$



3. คำนวณค่า Modal displacement

Generalized mass matrix

$$M = \begin{bmatrix} 284174 & 0 & -2 \\ 0 & 743974 & -3 \\ -2 & -3 & 7305337 \end{bmatrix}$$

จาก $K_n = M_n \cdot \omega_n^2$ ได้

$$\begin{aligned} K_1 &= 839 \text{ kN/m} \\ K_2 &= 18194 \text{ kN/m} \\ K_3 &= 359864 \text{ kN/m} \end{aligned}$$

Generalized force vector

$$P = \Phi^T \cdot \begin{bmatrix} 300 \\ 300 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 550 \\ -320 \\ -30 \end{bmatrix}$$

Modal displacement: $Y_n = D_n \cdot P_{0n} / K_n \sin(\omega_n \cdot t)$

$$Y_1 = 0.347 \sin(1.718 t)$$

$$Y_2 = -0.0232 \sin(4.945 t)$$

$$Y_3 = -0.00014 \sin(7.019 t)$$

ตอบ ก

4. คำนวณค่า Displacement ที่ยอดอาคาร:

$$\text{Displacement ที่ยอดอาคาร: } u_1 = \sum [\phi_{1n} \cdot Y_n(t)]$$

$$= 0.347 \sin(1.718 t) - 0.023 \sin(4.945 t) + 0.000 \sin(7.019 t)$$

ตอบ ข

5. แรงเฉือนในเสาที่ฐานของอาคาร:

$$f_s(t) = m \Phi \{\omega_n^2 Y_n(t)\}$$

$$m \Phi = \begin{bmatrix} 200000 & 200000 & 200000 \\ 105727 & -216821 & -588912 \\ 38050 & -185970 & 847929 \end{bmatrix} \quad \{\omega_n^2 Y_n(t)\} = \begin{Bmatrix} 1.025 \sin(1.718 t) \\ -0.567 \sin(4.945 t) \\ -0.007 \sin(7.019 t) \end{Bmatrix}$$

แรงเฉือนในเสาที่ฐานของอาคาร:

$$f_{s,3}(t) = 39.00 \sin(1.718 t) + 105.46 \sin(4.945 t) - 5.69 \sin(7.019 t)$$

ตอบ ค